数理解析研究所講究録
391巻 1980年 1-23

多様体上の確率微分方程式の定義する diffeomorphism の flow の微分と変分.

京大理 渡辺信三

1. 序. V を C^∞-manifold, $A_1, \dots, A_r, A_0$ を V 上の vector field, $w \in W_0^r := C([0, \infty) \to R^r) \cap \{w(0)=0\}$ を Wiener space (W_0^r, P^W) (P^W は Wiener measure) 上の r 次元 Brown 運動の canonical な実現とする. このとき確率微分方程式

$$(1) \qquad \begin{cases} dX_t = \sum_{i=1}^{r} A_i(X_t) \circ dw^i(t) + A_0(X_t)dt \\ X_0 = x \end{cases}$$

によって関数 $(t, x, w) \longmapsto X(t, x, w) \in V$ が定まる. これを $x \mapsto [w \longmapsto [t \mapsto X(t, x, w)]]$ とみなせば $[t \longmapsto X(t, x, w)]$ は一つの V 上の道 (path) で, したがって $[w \mapsto [t \longmapsto X(t, x, w)]]$ は V 上の道の値をとる Wiener 空間上の確率変数であり, それが各 $x \in V$ ごとに与えられていることになる. この確率変数の法則を P_x とおくと, $\{P_x\}$ は V 上の道全体の空間上の確率測度の系で, これが $L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} A_i^2 + A_0$ を生成作用素にもつ拡散過程を定義

2

することはよく知られている．事実，確率微分方程式(1)はこのような拡散過程を構成し研究する手段として主に考えられてきた．ところで上の写像をたとえば

$$w \longmapsto [t \longmapsto [x \longmapsto X(t,x,w)]]$$

とみなすと $x \longmapsto X(t,x,w)$ は V の(localな) diffeomorphism になっており，そのような diffeo. の one-parameter family (flow) がランダムに与えられたものと考えることが出来る．このような見方は拡散過程と見るのよりより精密なものであり，vector field A_i の動向とより密接に結びついている．(実際 $V=\mathbb{R}^n$, $n=r$ で $A_i(x)=\frac{\partial}{\partial x^i}$, $i=1,2,\dots,n$, $A_0=0$ ととった場合と，

$$A_i(x)=\sum_{k=1}^{n} a_i^k(x)\frac{\partial}{\partial x^k} \qquad A_0(x)=-\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{n}\frac{\partial a_i^k}{\partial x^j}(x)\cdot a_i^j(x)\frac{\partial}{\partial x^k}$$

(但し $x \longrightarrow (a_i^k(x))$ は smooth な $O(n)$-valued function)

ととった場合では，拡散過程としては同じ n 次元 Brown 運動であるが diffeo. の flow としては一般に異なる．) さらに t, x を固定して $w \longmapsto X(t,x,w)$ を考えるとこれは Wiener space 上の V 値の関数である．Wiener space 上の関数は Wiener 以来，Wiener functional あるいは Brownian functional として種々の立場から研究されてきた．確率微分方程式の解を Wiener functional と見なしてその解析を行うことは興味ある研究方向であろう．この報告では確率微分方

程式が定めるランダムな diffeo. の flow について，又それを Wiener functional と見てその解析について主として Malliavin とその周辺の研究をまとめてみたい．

2. diffeo. の flow と伊藤の公式．

$X(t, x, w)$ を確率微分方程式 (1) の解とする．このとき V 上の smooth な関数 $f(x)$ に対し

$$(2)\quad f(X(t,x,w)) - f(x) = \sum_{i=1}^{r}\int_0^t (A_i f)(X(s,x,w))\circ dw^i(s) + \int_0^t (A_0 f)(X(s,x,w))\,ds$$

$$= \sum_{i=1}^{r}\int_0^t (A_i f)(X(s,x,w))\,dw^i(s) + \int_0^t (Lf)(X(s,x,w))\,ds$$

がなりたつ、ここで $L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} A_i^2 + A_0$．いうまでもなく (2) の後の式が semimartingale $t \longmapsto f(X(t,x,w))$ の canonical 分解 (semimartingale 分解) を与える．ところで $X_t : x \longmapsto X(t,x,w)$ は V の diffeo.、であり その逆を X_t^{-1} とかくことにすると $\{\xi_t = X_t \circ X_s^{-1}(x)\}_{t \geq s}$ は 次の確率微分方程式をみたす；

$$(3)\quad \begin{cases} d\xi_t = \sum_{i=1}^{r} A_i(\xi_t)\circ dw^i(t) + A_0(\xi_t)\,dt \\ \xi_s = x. \end{cases}$$

これより次の後向きの方程式のなりたつことがわかる；

fを smooth な関数として

(4) $$f(X_t \circ X_s^{-1}(x)) - f(x) = \sum_{i=1}^{r} \int_s^t A_i [f(X_t \circ X_u^{-1}(x))] \circ dw^i(u)$$
$$+ \int_s^t A_0 [f(X_t \circ X_u^{-1}(x))] du$$
$$= \sum_{i=1}^{r} \int_s^t A_i [f(X_t \circ X_u^{-1}(x))] dw^i(u) + \int_s^t L [f(X_t \circ X_u^{-1}(x))] du$$

尚，この式において積分は時間の向きを逆に，すなわち t から 0 へ積分するものとする．$X_t \circ X_u^{-1}$ が $\sigma(w(t)-w(\tau);\ u \le \tau \le t)$ - 可測なので確率積分も well-defined である．又 右辺の微分作用素は合成して得られた x の関数 $f(X_t \circ X_u^{-1}(x))$ に作用するものとする．

$u(t,x) = E^W[f(X(t,x,w))]$ （E^W は Wiener 測度 P^W による積分）は (4) より積分と微分の順序変更を行えば直ちに熱方程式

(5) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = L u \\ u|_{t=0} = f \end{cases}$$

の解であることがわかる．

さて，(5) は u や f が関数，すなわち scalar field の場合であったが diffeo. X_t を用いて任意の tensor field へ拡張することが出来る．一般に diffeo. $\varphi: V \to V$ が与えられたとき V 上の tensor field の間に写像 φ^* が導入さ

れる．すなわち　$T(x)=(T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}(x))$　とするとき

$$\varphi^*T(x)=\left(T^{l_1\cdots l_p}_{k_1\cdots k_q}(\varphi(x))\frac{\partial\varphi^{k_1}}{\partial x^{j_1}}\cdots\frac{\partial\varphi^{k_q}}{\partial x^{j_q}}\cdot\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]^{-1\,i_1}_{\;\;l_1}\cdots\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]^{-1\,i_p}_{\;\;l_p}\right)$$

で定義されるもので，特に T が vector field A のときは　$\varphi^*(A)(x)=(\varphi^{-1})_*(A(\varphi(x)))$，（下つきの $*$ は写像の differential）

であり，　p-form　α のときは　$\varphi^*(\alpha)$ は α の <u>pull back</u>

$\varphi^*(\alpha)(X_1,\ldots,X_p)_x=(\alpha)_{\varphi(x)}(\varphi_*(X_1),\ldots,\varphi_*(X_p))$　である．

X を V 上の vector field，$\varphi_t=\exp tX$（：＝ X で生成される diffeo. の one-parameter group）として $\mathcal{L}_X(T)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\varphi_t^*(T)-T}{t}$

で tensor field を定め，T の X による <u>Lie derivative</u> という．

<u>例1.</u> a)　$T=f$ ： scalar field $\Rightarrow$ $\mathcal{L}_X(f)=X(f)$

b)　$T=A$ ： vector field $\Rightarrow$ $\mathcal{L}_X(A)=[X,A]\,(:=XA-AX)$

c)　$T=\alpha$ ： p-form のときは次の Cartan の公式で与えられる．

$$\mathcal{L}_X(\alpha)=i(X)\,d\alpha+d\,[i(X)\alpha],\quad\left(\begin{array}{l}i\text{ は interior product}\\ d\text{ は exterior derivative}\end{array}\right)$$

「(注)　簡単に differential form に関する演算を復習しておく．

$\alpha=\sum\limits_{i_1<\cdots<i_p}\alpha_{i_1\cdots i_p}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}$　を p-form，$\tilde{\alpha}_{i_1\cdots i_p}$ を

$\alpha_{i_1\cdots i_p}$ $(i_1<\cdots<i_p)$ の交代拡張とする．

<u>exterior derivative</u>，　$d\alpha=\sum\limits_{i_1<\cdots<i_p}\dfrac{\partial\alpha_{i_1\cdots i_p}}{\partial x^i}dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}$
（p+1−form）

<u>interior product</u>，　$X=X^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$　を vector field として

$$i(X)\alpha=\sum_{i_1<\cdots<i_p}(X^i\tilde{\alpha}_{i,i_1\cdots i_{p-1}})dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_{p-1}}\quad(\text{p-1-form})$$

又ここでは　α を　p次共変交代テンソルとみるときは

$\dfrac{1}{p!}\tilde{\alpha}_{i_1\cdots i_p}dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_p}$　とみなす．特に $X_m=X^i_m\dfrac{\partial}{\partial x^i}$，$m=1,2,\ldots,p$

を vector field として $\alpha(X_1, \ldots, X_p) = \frac{1}{p!}\tilde{\alpha}_{i_1 \cdots i_p} X^{i_1} \cdots X^{i_p}$
とする.（松島「多様体入門」とは定数が異なっている）□

さて方程式 (2) 及び (4) は f が tensor field のときにもそのままなりたつ、ただし $f(X(t,x,w))$, $f(X_t \circ X_s^{-1}(x))$ はそれぞれ induced tensor field $X_t^*(f)$, $(X_t \circ X_s^{-1})^*(f)$ でおきかえ operator A_i, L はそれぞれ $\mathcal{L}_{A_i}$, $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\mathcal{L}_{A_i}^2 + \mathcal{L}_{A_0}$ でおきかえる．したがって tensor field $u(t,x) = E^W[X_t^*(f)]$ は熱方程式 (5)（但し $L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\mathcal{L}_{A_i}^2 + \mathcal{L}_{A_0}$）の解を与える。

以上のことは V の frame bundle $GL(M)$ へ持ち上げて考えるとより明解になる. $GL(M) = \{r = (x, e)\ ; x \in V,$ $e = (e_1, \ldots, e_n)$ は $T_x(V)$ の1つの base$\}$ とおく. local coordinate (x^i, e_j^i)（但し $e_j = e_j^i \frac{\partial}{\partial x^i}$）によって $GL(M)$ は manifold になる. 任意の V 上の vector field X は $\tilde{X}f(r) = \frac{d}{dt}f(\exp tX\cdot x, (\exp tX)_* e)\big|_{t=0}$ により $GL(M)$ 上の vector field $\tilde{X}$ を induce する. 確率微分方程式 (1) に対応して $GL(M)$ 上の確率微分方程式

$$
(6)\quad \begin{cases} dr_t = \sum_{i=1}^{r}\tilde{A}_i(r_t)\circ dw^i(t) + \tilde{A}_0(r_t)dt \\ r_0 = r(=(x,e)) \end{cases}
$$

を考える. この解を $r(t,r,w)$ とするとき, 定義よりすぐ

わかるようにそれは $(X(t,x,w),\ (X_t)_* e = [(X_t)_* e_1, \ldots, (X_t)_* e_n])$ で与えられるものである。特に $(X_t^* e)^i_j = \sum_{\ell} \frac{\partial X^i(t,x,w)}{\partial x^\ell} e^\ell_j$ で，方程式(6)は方程式(1)にその変分方程式を合せて考えたものである。このような方程式は Gihman-Skorohod の本などでもよく論ぜられている。今 $T = (T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}(x))$ を tensor field とするとき $F_T(r)^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} = T(x)^{k_1\cdots k_p}_{\ell_1\cdots \ell_q} e^{\ell_1}_{j_1}\cdots e^{\ell_q}_{j_q} f^{i_1}_{k_1}\cdots f^{i_p}_{k_p}$ とおくとこれは局所座標のとり方に無関係に定まりしたがって GL(M) 上の関数の系 $F_T(r) = (F_T(r)^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q})$ が定義される*)。これを tensor field T の <u>scalarization</u> という。今 V 上の diffeo. φ は $\tilde{\varphi}(r) = (\varphi(x), \varphi_*(e))$ によって GL(M) 上の diffeo. を induce し，すぐにわかるように

$$F_{\varphi^*(T)}(r) = F_T[\tilde{\varphi}(r)], \quad F_{\mathcal{L}_X T}(r) = (\tilde{X} F)(r)$$

がなりたつ。したがって上にのべた tensor field の方程式(2)や(4)は，$F_T(r_t)$ に関する対応する方程式に他ならない、尚，方程式(6)をもっと一般にしてある(1-1) tensor に対応する vertical な GL(M) 上の vector field も加えて考えれば $L = \sum_{i=1}^{r} D_i^2 + D_0$:（D_i は tensor field 上の derivation）の場合まで論ずることが出来ることが明山浩氏によって注意されている（1980年春，数学会講演）。

例2. $A(x) = a^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$: V 上の vector field, $F_A^i(r) = f^i_k a^k(x)$ とするとき，

*) (f^i_k) は (e^i_k) の逆行列

(7) $F^i_A(r_t) - F^i_A(r) = \sum_{m=1}^{r} \int_0^t F^i_{[A_m, A]}(r_s) \circ dW^m(s) + \int_0^t F^i_{[A_0, A]}(r_s) ds$

$i = 1, 2, \ldots, n$

3. Stochastic moving frame

M を n-次元 Riemann 多様体, $O(M) \subset GL(M)$ を正規直交 frame bundle とする. $GL(M)$ 上の vector field L_m, $m = 1, 2, \ldots, n$

但し $L_m = e^i_m \frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma^g_{k\ell} e^\ell_j e^k_m \frac{\partial}{\partial e^g_j}$ （Γ は christoffel の記号）

は submanifold $O(M)$ にそった vector field でしたがって $O(M)$ 上の vector field と考えてよい. これを basic vector field の系という. manifold $O(M)$ の各 tangent space は $D(n)$ = the Lie algebra of Euclid motion group と同型である. $D(n)$ の元は (π^i, π^i_j), $(\pi^i) \in \mathbb{R}^n$, (π^i_j) は skew-symmetric $n \times n$ matrix の形をしている. 今 $O(M)$ 上の $D(n)$-valued 1-form $\pi = (\pi^i, \pi^i_j)$ を

$$\pi^i = f^i_j \, dx^j$$

$$\pi^i_j = f^i_p (de^p_j + \Gamma^p_{k\ell} e^\ell_j dx^k)$$

で定める. これを connection form という. あきらかに

$$\pi^i(L_m) = \delta^i_m \quad , \quad \pi^i_j(L_m) = 0 \quad , \quad i, j, m = 1, 2, \ldots, n$$

がなりたつ. connection form に対する基本関係式は次の構造方程式 (structure eq.) である:

X, Y を任意の $O(M)$ 上の vector field として

$$\begin{cases} (d\pi^i)(X, Y) = -\frac{1}{2}[\pi^i_j(X)\pi^j(Y) - \pi^i_j(Y)\pi^j(X)] \\ d\pi^i_j(X, Y) = -\frac{1}{2}[\pi^i_k(X)\pi^k_j(Y) - \pi^i_k(Y)\pi^k_j(X)] \\ \qquad\qquad + \bar{R}^i{}_{jkl}\pi^k(X)\pi^l(Y) \end{cases}$$

($\bar{R}$ は Riemann curvature tensor の scalarization)

これは次のようにもあらわされる：

$$\begin{cases} d\pi^i = -\pi^i_j \wedge \pi^j \\ d\pi^i_j = -\pi^i_k \wedge \pi^k_j + 2\sum_{k<l} \bar{R}^i{}_{jkl}\pi^k \wedge \pi^l \end{cases}$$

さて §1 の話で $V = O(M)$, $r = n\ (:= \dim M)$, $A_i = L_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $A_0 = 0$ ととった場合，すなわち確率微分方程式

$$(8)\quad \begin{cases} dr_t = \sum_{i=1}^{n} L_i(r_t) \circ dw^i(t) \\ r_0 = r \end{cases}$$

を考え，これによって定まる $O(M)$ 上の diffeo. の flow $r_t = (r(t, r; w))$ を M 上の <u>stochastic moving frame</u> という．直観的にいうと $r_t = (x_t, e_t)$ として，x_t の無限小運動は frame e_t で定まる Euclid 空間 $T_{x_t}(M)$ での Wiener process $(w^i(t))$ で与えられるが frame e_t の運動は x_t にそっての平行

移動（接続）で与えられるのである．あるいは (8) を次の形に書くことが出来る、

$$(8)' \quad \begin{cases} \pi^i(dr_t) = dw^i(t) \\ \pi^i_j(dr_t) = 0 \\ r_0 = r \end{cases} .$$

これは M 上の運動 x_t を Euclid 空間に展開 (develop) したものが n 次元の Wiener process $(w^i(t))$ であるということに他ならない． stochastic moving frame は伊藤清氏によって始めて考えられた M 上の Brown 運動の curve にそった平行移動を実現するものとして Eells, Elworthy や Malliavin によって導入され M 上の stochastic differential geometry を考察する際の基礎となるものである． r_t は $\frac{1}{2}\Delta_{O(M)}$ ($\Delta_{O(M)} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} L_i^2$: Bochner の horizontal Laplacian) を生成作用素にもつ O(M) 上の拡散過程でその M への射影 $x_t = p(r_t)$ は $\frac{1}{2}\Delta$ (Δ は Laplace - Beltrami) を生成作用素にもつ M 上の拡散過程（すなわち M 上の Brown 運動）になる． T を M 上の tensor field とし F_T をその scalarization とするとき

$$u(t, r) = E^W[F^T(r(t, r; w))]$$

はある（一意的に定まる） M 上の tensor field $v(t, x)$ の scalarization となる：$u(t,r) = F^{v(t,\cdot)}$, ことがわかる、さらに $\Delta_{O(M)}(F^{T}) = F^{\Delta T}$ ：ここで $\Delta T = g^{ij}\nabla_i\nabla_j T$ （∇_i は共変微分）は tensor field に作用する Laplace-Beltrami の作用素である、したがって $v(t,r)$ は熱方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\Delta v \\ v|_{t=0} = T \end{cases}$$

の解を与えることがわかる．さらに p-form の場合には Feynman-Kac 型の重みをつけて平均すれば Δ のかわりに Hodge-de Rham-Kodaira の Laplacian $-(d\delta+\delta d)$ に対応する熱方程式の解が得られる．

さて $O(M)$ 上の diffeo. の flow r_t の differential $(r_t)_*: T_r(O(M)) \longrightarrow T_{r_t(r)}(O(M))$ の表現をもとめよう、ところで $T_r(O(M))$ と $D(n)$ は対応 $v \in T_r(O(M)) \longrightarrow \pi_r(v) = (\pi^i(v)_r, \pi^i_j(v)_r)$ によって同型で この同型のもとで $(r_t)_*$ を $D(n)$ 上の isomorphism とみてそれを J_t とあらわす： $J_t(r) = \pi_{r_t(r)} \circ (r_t)_* \circ \pi_r^{-1}$．このとき

<u>定理</u> 行列 $J_t(r) \in \mathrm{End}(D(n))$ は次の確率微分方程式の解として与えられる： $z \in D(n)$ を任意に固定して $Z(t) = J_t(r)z$ とおくとき （$Z(t) = (z^i(t), z^i_j(t)) \in D(n)$）

$$
(9)\begin{cases} dz^i(t) = \frac{1}{2} z^i_j(t) \circ dw^j(t) \\ dz^i_j(t) = \bar{R}^{\,i}_{\;jkl}(r(t))\, z^l(t) \circ dw^k \\ Z(0) = z, \end{cases}
$$

証明　$v = \pi_r^{-1}(z) \in T_r(O(M))$ とおく、すると

$$Z(t) = \pi_{r_t(r)}\left((r_t)^*(v) \right)$$

$$= r_t^*(\pi)_r(v) \qquad (r_t^*(\pi) \text{ は form } \pi \text{ の } r_t \text{ による pull back})$$

§2 の結果より $O(M)$ 上の form に作用する Lie derivative $\mathcal{L}_{L_m}$ を $\mathcal{L}_m$ と略記して

$$dZ(t) = \sum_{m=1}^{n} r_t^*(\mathcal{L}_m \pi)_r(v) \circ dw^m(t)$$

Cartan の公式より

$$\mathcal{L}_m \pi = i(L_m)d\pi + d\, i(L_m)\pi$$

であった、故に

$$(r_t^*)(\mathcal{L}_m \pi)_r\,(v) = (r_t^* d\pi)((L_m)_r, v) + r_t^*\, \underset{0}{\underset{\shortparallel}{d[\pi(L_m)]}}.$$

したがって

$$dZ(t) = (d\pi)(dr(t),\ r_t^* v)$$

構造方程式と (8)′ より

$$dZ^i(t) = (d\pi^i)(dr(t),\ r_t^* v)$$

$$= \frac{1}{2}\pi^i_j(r_t^* v)\cdot \pi^j(dr_t) = \frac{1}{2} Z^i_j(t) \circ dw^j(t)$$

$$dZ^i_j(t) = \bar{R}^i_{jkl}\, Z^l(t) \circ dW^k(t) \quad . \qquad \text{q.e.d.}$$

一般に matrix-valued non-anticipative process $E_m(t)$, $C(t)$ が与えられたとき, matrix-valued 確率微分方程式

$$\begin{cases} dg(t) = E_m(t)\, g(t) \circ dW^m(t) + C(t)\, g(t)\, dt \\ g(0) = I \end{cases}$$

の解を $\exp\left\{ * \int_0^t (E_m(s) \circ dW^m(s) + C(s)\, ds) \right\}$ とあらわす (McKean の stochastic multiplicative integral).
一般の初期値 $g(0)$ の解は $g(t) = \exp\left\{ * \int_0^t (E_m(s) \circ dW^m(s) + C(s)\, ds) \right\} g(0)$ とあらわされる. そこで特に $D(n)$ の線型変換全体 $:= \mathrm{End}\, D(n)$ を行列の集合とみなして
$U_m(t) \in \mathrm{End}\, D(n)$ を

$$\begin{cases} (U_m(t) z)^i = \frac{1}{2} z^i_j \\ (U_m(t) z)^i_j = \bar{R}^i_{jml}(r(t, r))\, z^l \end{cases}$$

で定めると

$$(10) \quad J_t(r) = \exp\left\{ * \int_0^t U_m(s) \circ dW^m(s) \right\}$$

$$= \exp\left\{ * \int_0^t (U_m(s)\, dW^m(s) + \frac{1}{2} M(s)\, ds) \right\}$$

ここで $M(s) \in \mathrm{End}\, D(n)$ は

$$
(11)\quad
\begin{cases}
(M(s)z)^i = \dfrac{1}{4}\,\overline{R}^i_{\ell}(r(s,r))\,z^{\ell} \\[2ex]
(M(s)z)^i_j = \overline{R}^{\ i}_{j\underline{m}\ell;\underline{m}}(r(s,r))\,z^{\ell} + \dfrac{1}{2}\,\overline{R}^{\ i}_{j\underline{k}\ell}(r(s,r))\,z^{\ell}_{\underline{k}}
\end{cases}
$$

($\underline{m}$, $\underline{k}$ は m, k についても加えることを意味する)

($\overline{R}^{\ i}_{jk\ell;m}$ は $\nabla_m R^{\ i}_{jk\ell}$ の scalarization).

なお $\mathrm{trace}\ u_m(t) = 0$ であるから $\det J_t(r) = 1$ a.s. なることがわかる. ($d[\det J_t(r)] = \det J_t(r) \times \mathrm{trace}\ u_m(t) \circ dw^m(t)$ に注意すればよい).

次に Vauthier[3] による p-form に関する <u>homotopy formula</u> をもとめておこう. α を M 上の p-form とし projection $p: O(M) \to M$ による α の pull back を $\alpha^* := p^*(\alpha)$ とする. このとき

$$
(12)\qquad r_t^*(\alpha^*) - \alpha^* = dG(t,\alpha) + G(t, d\alpha)
$$

ここで一般に $G(t,\beta)$ は M 上の q-form β に対し次式で定まる $O(M)$ 上の $(q-1)$-form をあらわす;

$$
(13)\qquad G(t,\beta) = \sum_{I}\sum_{k=1}^{q}(-1)^{k-1}\int_0^t F_I^{\beta}(r_s)\, r_s^*(\Omega^{I\setminus\{i_k\}})\, dw^{i_k}(s)
- \frac{1}{2}\int_0^t r_s^*(\delta\beta)^*\, ds + \frac{1}{2}\sum_{I}\sum_{k=1}^{q}(-1)^{k-1}\int_0^t F_I^{\beta}(r_s)
\times r_s^*(\mathcal{L}_{i_k}\Omega^{I\setminus\{i_k\}})\, ds
$$

ここで $\Omega^I = \pi^{i_1} \wedge \cdots \wedge \pi^{i_q}$, $I = (i_1, i_2, \ldots, i_q)$, $i_1 < \cdots < i_q$

$F_I^{\beta}(r) := \tilde{\beta}_{j_1 \cdots j_q} e_{i_1}^{j_1} \cdots e_{i_q}^{j_q}$, $r = (x^i, e_j^i)$,

(したがって $\beta = \sum_I F_I^{\beta}(r)\Omega^I$ とする)

又 δ は d の dual 作用素.

<u>証明</u> Itô の公式と Cartan の公式 (cf. §2) より

$$r_t^*(\alpha^*) - \alpha^* = d\int_0^t r_s^*[\{i(L_m)\alpha\}^*] \circ dw^m(s)$$

$$+ \int_0^t r_s^*[\{i(L_m)(d\alpha)\}^*] \circ dw^m(s)$$

$$= dG(t, \alpha) + G(t, d\alpha)$$

ここで $G(t, \beta) = \int_0^t r_s^*[\{i(L_m)\beta\}^*] \circ dw^m(s)$ である.

$\beta^* = \sum_I F_I^{\beta}\Omega^I$ より $\{i(L_m)\beta\}^* = \sum_I F_I^{\beta} i(L_m)\Omega^I$

$$= \sum_I \sum_{k=1}^{q} (-1)^{k-1} F_I^{\beta}(r) \cdot \delta_m^{i_k} \Omega^{I\setminus\{i_k\}}.$$

故に $G(t, \beta) = \sum_I \sum_{k=1}^{q} (-1)^{k-1} \int_0^t F_I^{\beta}(r_s)\, r_s^*(\Omega^{I\setminus\{i_k\}}) \circ dw^k(s)$

$$= \sum_I \sum_{k=1}^{q} (-1)^{k-1} \int_0^t F_I^{\beta}(r_s)\, r_s^*(\Omega^{I\setminus\{i_k\}})\, dw^k(s)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_I \sum_{k=1}^{q} (-1)^{k-1} \int_0^t r_s^*(\mathcal{L}_{i_k} F_I^{\beta} \cdot \Omega^{I\setminus\{i_k\}})\, ds$$

ところで $\mathcal{L}_{i_k}(F_I^{\beta} \cdot \Omega^{I\setminus\{i_k\}}) = (L_{i_k} F_I^{\beta})\Omega^{I\setminus\{i_k\}}$

$+ F_I^{\beta} \mathcal{L}_{i_k} \Omega^{I\setminus\{i_k\}}$ であり, あと

$$\sum_I \sum_{k=1}^{q} (-1)^{k-1} (L_{i_k} F_I^{\beta}) \Omega^{I\setminus\{i_k\}} = \sum_{I'} \sum_{m=1}^{n} L_m F^{\beta}_{(m, I')} \Omega^{I'}$$

$$= -\sum_{I'} F_{I'}^{\delta\beta}\, \Omega^{I'} = -\delta\beta \quad , \quad I' = (i_1, i_2, .., i_{p-1}) \quad i_1 < i_2 \cdots < i_{p-1}$$

に注意すればよい。

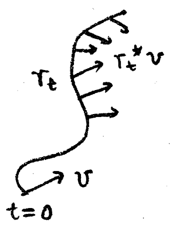
<u>Corollary</u> (Eells, Malliavin)[3],[2]

α が harmonic 1-form, i.e. 1-form で $d\alpha = 0$, $\delta\alpha = 0$ のとき すべての t に対し

$$\alpha^* = E[\, r_t^*(\alpha^*) \,]$$

がなりたつ。

さて $v \in T_r(O(M))$ を1つえらんで固定するとき $(r_t)_* v \in T_{r_t}(O(M))$, $0 \le t < \infty$, は curve $r_t = r(t, r, w)$, $0 \le t < \infty$ に沿った vector field をあたえる。これは古典的な Jacobi field に対応するもので Malliavin はこれを <u>stochastic</u> <u>Jacobi</u> <u>field</u> と呼んでいる[2]。この概念を理解するために古典的な Jacobi field を復習する。



今 $r \in O(M)$ と $(c^1, c^2, .., c^n) \in \mathbb{R}^n$ を固定すると、微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dr_t}{dt} = L_m(r_t)\, c^m \\ r_0 = r = (x, e) \end{cases}$$

によって $O(M)$ 上の curve $r_t = r_t(r)$ がえられる。その M 上の射影 $x_t = p(r_t)$ は $x_0 = x$, $\dot{x}_0 = c^m e_m$ であるような geodesic に他ならない。$\underbrace{(r_t)_*(v) \text{ は } r_t \text{ に沿}}_{v \in T_r(O(M)) \text{ をえらぶとき}}$

った vector field で $J_t^v = P_*[(r_t)_* v]$ は geodesic x_t に沿った vector field である. これを Jacobi-field という.
J_t^v は $v = (v^i, v_j^i)$ に linear に depend するが

$$J_t^v = J_t^{v'} \iff v^i = v'^i \qquad c^j v_j^i = c^j v'^i_j$$

は容易にわかるので (r_t を固定したときの) Jacobi field は $2n$ 次元の vector space をなす. $r_t = (x_t, e_i(t))$ とするとき, $J_t^v = f^i(t) e_i(t)$, ここで $f^i(t) = \pi^i_{r_t}(r_t^*(v))$.
故に構造方程式より

$$\begin{cases} \dfrac{df^i}{dt} = \dfrac{1}{2} z_j^i(t)\, c^j \\[2ex] \dfrac{dz_j^i}{dt} = \bar{R}^i_{jkl} f^l c^k \end{cases}$$

すなわち $\dfrac{d^2 f^i}{dt^2} = \dfrac{1}{2}\bar{R}^i_{jkl} c^j c^k f^l$, $f^i(0) = v^i$, $\dot{f}^i(0) = \frac{1}{2} v_j^i c^j$
となり f^i は Jacobi の方程式をみたすことがわかる.

stochastic な Jacobi-field は $(c^1, \ldots, c^n)$ を n 次元の white noise $(dw^1(t), \ldots, dw^n(t))$ でおきかえたものといえる. 上でもとめた方程式 (9) が Jacobi の方程式に対応する. ところで古典的な Jacobi field は測地線の変分としてもとえられるものであった. stochastic な場合には Wiener process $w(t)$ に関して変分をとることに対応する, それを次節でのべる.

4. Stochastic calculus of variation

上の stochastic moving frame $r(t, r; w)$ は w の関数とみると Wiener 過程の可測関数，すなわち汎関数である．W_0^n は Frechet 空間であるからその上の関数に対しては汎関数微分（Frechet 微分）が定義される．形式的に計算すると

$$(14)\quad \left.\frac{\partial r(t, r, w+\varepsilon\cdot\delta w)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_0^t Dr(s, r, w)_m (\delta w)^m(s)\,ds,$$

ここで $Dr(s, r, w)_m \in T_{r(t)}(O(M))$, $m=1,2,\ldots,n$ は

$$Dr(s, r, w)_m = (r_t)_*(r_s)_*^{-1}(L_m)_{r(s)}$$

によって与えられることがわかる．したがって $Dr(s, r, w)_m$ はすべて stochastic Jacobi field である． ところで $r(t)$ は W_0^n 上の関数としては Wiener 測度に関して可測な関数であり，測度 0 の違いを無視して一意的に定まる．もちろん一般には W_0^n の位相に関して連続なものではない．このような Wiener process の汎関数，すなわち Wiener functional の微分をどのように定義するのがよいかについては色々な研究がある．Malliavin や Stroock[4] は W_0^r 上の Ornstein-Uhlenbeck 過程を用いた確率解析を用いてこれを論じたし，重川は Fréchet-derivative の $L^p(P^W)$-norm による closed extension としてこの問題を論じた．以下で簡単にこの両者の立場を概

観する.

<u>W_0^r 上の Ornstein − Uhlenbeck 過程</u>とは W_0^r − 値拡散過程 w_t であって次のマルチンゲール問題の解として特性づけられるものである: $\{P_w\}_{w\in W_0^r}$ は $\Omega(W_0^r)=C([0,\infty)\to W_0^r)$ $\underset{t}{\Psi} \longmapsto \underset{w_t=(w_t(s))}{\Psi}$ 上の Borel 確率測度の系であって (i) $P_w\{w_0=w\}=1$

(ii) $\forall \underbrace{\varphi \in C_0^\infty(R^1)}_{R^r\text{-値}}$, $\forall f\in C_0^\infty([0,\infty)\to R^r)$:= $[0,\infty)$ 上の compact な台をもつ C^∞-関数全体 に対し

$$w_t(f) = -\int_0^\infty f'(s)\cdot w_t(s)\,ds \quad \text{とおくとき}$$

$$\varphi(e^{\frac{t}{2}}w_t(f)) - \frac{\|f\|^2}{2}\int_0^t e^s \varphi''(e^{\frac{s}{2}}w_s(f))\,ds$$

が P_w − martingale. $\left(\|f\|^2=\int_0^\infty |f(s)|^2 ds\right)$

このような拡散過程は容易に構成できる: 実際 $\overline{W}(u,v)$ を $[0,\infty)\times[0,\infty)$ 上の $ds\,d\tau$ を variance-measure にもつ(平均 0 の) Gaussian random measure とし, その τ-直積を $W(s,\tau)$ とあらわす. $w\in W_0^r$ に対して

$$\xi_t(s) = e^{-\frac{t}{2}}\left[\, w(s) + \int_0^t\int_0^s e^{\frac{u}{2}} W(du,dv)\right]$$

は連続な変形をもちしたがって $t\longmapsto[s\longmapsto \xi_t(s)]$ は $\Omega(W_0^r)$ − 値の確率変数を定める. この法則を P_w とすればよい. 今 P^W を W_0^r 上の Wiener 測度とし

$$\mathbb{P} = \int_{W_0^r} P_w(\cdot)\,P^W(dw)$$

とおくと $\mathbb{P}$ は $\Omega(W_0^r)$ 上の shift invariant で reversible

な確率測度（すなわち P^W は $\{P_w\}$ の invariant measure かつ $\{P_w\}$ は P^W に関し対称）である．各 $1 \leq p \leq \infty$ に対し

$$D_p(\mathcal{L}) = \{ \Phi \in L^p(P^W) \; ; \; \exists \Psi \in L^p(P^W)$$

$\left(\Phi(w_t) - \int_0^t \Psi(w_s)\,ds, \; \mathbb{P} \right)$ が martingale $\}$

このとき Ψ は Φ から一意的に定まり これを $\Psi = \mathcal{L}\Phi$ とあらわす．特に $p=2$ のときは Ornstein-Uhlenbeck 過程の定める $L^2(P^W)$-semigroup の生成作用素と一致する．

又 $g \in C_0^\infty(R^m)$, $f_1, f_2, \ldots, f_m \in C_0^\infty([0,\infty) \to R^r)$,

$$\Phi(w) = g(w(f_1), w(f_2), \ldots, w(f_m))$$ のとき

は $\Phi \in D_p(\mathcal{L})$ で $\mathcal{L}\Phi = \frac{1}{2}\left\{ \sum_{i,j=1}^m (f_i, f_j)(\partial_i \partial_j g)(w(f_1), w(f_2), \ldots, w(f_m)) - \sum_{i=1}^n w(f_i)\,\partial_i g\,(w(f_1), w(f_2), \ldots, w(f_m)) \right\}$

で与えられる.$^{*)}$ $\mathcal{L}$ を Ornstein-Uhlenbeck 作用素という．

$p=2$ のときはこれはいわゆる無限次元 Laplacian と一致する：$L^2(W_0^r, P^W) = \bigoplus_0^\infty \mathcal{H}_n$ を Wiener-Itô 分解とする

$$\Phi = \sum_n \Phi_n$$

とき $D_2(\mathcal{L}) = \{ \Phi \; ; \; \sum n^2 \|\Phi_n\|_{L^2(P^W)} < \infty \}$

かつ $\mathcal{L}\Phi = -\frac{1}{2}\sum_n n\Phi_n$.

今 $\Phi, \Psi \in D_2(\mathcal{L})$ とするとき $\Phi \cdot \Psi \in D_1(\mathcal{L})$ となるこ

---

*) $(f_i, f_j) = \int_0^\infty f_i(s) f_j(s)\,ds$

とが容易にわかる．そこで

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = \bar{L}(\Phi \cdot \Psi) - \Phi \bar{L}\Psi - \Psi \bar{L}\Phi$$

によって $\langle \Phi, \Psi \rangle \in L^1(P^W)$ を定義する．今 $\Phi \in D_2(\bar{L})$ に対し2乗可積分マルチンゲール $(\Phi(w_t) - \int_0^t \bar{L}\Phi(w_s)ds, \mathbb{P})$ を $M_\Phi(t)$ であらわすと 実は $\langle M_\Phi, M_\Psi \rangle_t = \int_0^t \langle \Phi, \Psi \rangle (w_s) ds$ ，$\Phi, \Psi \in D_2(\bar{L})$ となることが示される．そうするとあとは通常の確率解析のわく組にのって例えば次のようなことが示される（Itôの公式）： $\infty \geq p \geq 1$ に対し

$$K_p = \{ \Phi \in D_{2p}(\bar{L}) ; \quad \langle \Phi, \Phi \rangle \in L^p(P^W) \}$$

$$\| \Phi \|_{K_p} = E^{P^W}[|\Phi|^{2p} + |\bar{L}\Phi|^{2p} + \langle \Phi, \Phi \rangle^p]^{\frac{1}{2}}$$

とおくと K_p は Banach space で $K_q \subset K_p$ $q \geq p$ かつ $K_1 = D_2(\bar{L})$．今 $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_m) \in (K_1)^m$ $\varphi \in C^2(R^m)$ で $\sup_{x \in R^m} \left[\frac{|\varphi(x)|}{1+|x|^2} + \frac{\sum_{i=1}^m |\partial_i \varphi(x)|}{1+|x|} + \sum_{i,j=1}^m |\partial_i \partial_j \varphi(x)| \right] < \infty$ とするとき $\varphi \circ \Phi \in D_1$ かつ

$$\bar{L}(\varphi \circ \Phi) = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^m \langle \Phi_k, \Phi_l \rangle \partial_k \partial_l \varphi \circ \Phi + \sum_{k=1}^m \bar{L}\Phi_k \cdot \partial_k \varphi \circ \Phi .$$

さらに $\Phi \in (K_2)^m$ のとき同様の Φ に対し $\varphi \circ \Phi \in K_1$ で $\langle \varphi \circ \Phi, \Psi \rangle = \sum_{k=1}^m \langle \Phi_k, \Psi \rangle \partial \varphi_k \circ \Phi, \quad \forall \Psi \in K_1$ がなりたつ．

一方重川は "smooth" な W_0^r 上の関数から出発しその Frechet derivative のある L^p-norm による closed extension をとることにより上のような微分の定義をおこなった(cf. [1])。上の $D_p(\bar{L})$ は重川の $H(p;p)$ に対応している。又 $\langle \Phi, \Psi \rangle$ は $(D\Phi, D\Psi)_H$ に対応している。尚 Malliavin はこれを $\nabla\Phi\cdot\nabla\Psi$ と表わしている。しかし Stroock や Malliavin の定義では $\nabla\Phi$ や $D\Phi$ そのものの定義はない。ところでたとえば (14) のような関係式を得たい場合 $\nabla\Phi$ や $D\Phi$ に対応する概念が必要である。

上で概観してきた Wiener functional の微分の概念は確率微分方程式の解に適用され有効に応用されている。特に拡散過程の推移確率密度の存在とその滑らかさについて新しい確率論的方法が得られた。実際 Malliavin は微分作用素 $L=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} A_i^2$ ($A_1,\dots,A_r$ は vector field) に対応する hypoellipticity problem をこの方法で論じ Hörmander の結果をさらに精密にした([1])。$L=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} A_i^2+A_0$ の形の作用素のときにはこの立場からはまだ問題がのこっている。しかしいずれにせよ Stroock のいうとおり、たとえ strictly elliptic の場合でさえ、従来解析的方法によってのみ論じられてきた熱方程式の regularity problem に確率論的方法が可能になったことは画期的というべきではなかろうか。

文献

[1] N. Ikeda, S. Watanabe : Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes. Kodansha (近刊)

[2] P. Malliavin : Stochastic Jacobi fields.

[3] J. Vauthier : Homotopie stochastique dans le complexe de de Rham. Obstruction à des formules de la moyenne pour des formes harmoniques.

[4] D. W. Stroock : The Malliavin Calculus and its Application to Second order Parabolic Differential Equations.